ÉCOLE NAVALE

Concours 1985

*Première composition de mathématiques*

Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Lorque $J = ]-a, +a[$ avec $a > 0$, on le note $J_a$. On note E (J) l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur J, $F_a$ et $G_a$ les sous-ensembles de E ($J_a$) constitués respectivement par les fonctions paires et les fonctions impaires de E ($J_a$).

**I^re^ Partie.**

1°) Montrer que $F_a$ et $G_a$ sont des sous-espaces supplémentaires de E ($J_a$).

2°) Soit $u_1$ l'application qui à toute fonction $f$ de E (J) fait correspondre la fonction $g_1$ définie par

$$g_1(x) = f(x) - x f'(x)$$

*a)* L'application $u_1$ est-elle un endomorphisme de l'espace vectoriel E (J) ?

*b)* Est-elle injective ? Préciser son noyau. On prendra garde au cas où $0 \in J$.

*c)* Est-elle surjective ? Discuter la réponse suivant la position du nombre 0 par rapport à J.

3°) Déterminer l'ensemble $V_1$ des fonctions de E ($J_a$) dont l'image par $u_1$ est dans $F_a$, et l'ensemble $W_1$ de celles dont l'image est dans $G_a$.

4°) Déterminer, en discutant suivant la position de 0 par rapport à J, les valeurs propres et les sous-espaces propres de $u_1$.

5°) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels à une indéterminée. On a évidemment $\mathbb{R}[X]$ inclus dans E ($\mathbb{R}$).

*a)* Déterminer l'ensemble image de $\mathbb{R}[X]$ par $u_1$.

*b)* Soit $g$ un élément de cet ensemble. Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ appartenant à E ($\mathbb{R}$) et ayant pour image $g$ par $u_1$.

6°) On note $S_a$ l'ensemble des fonctions qui admettent un développement en série entière de rayon de convergence $a$.

Montrer que $S_a$ est stable par $u_1$, c'est-à-dire que $g = u_1(f)$ admet aussi un développement en série entière de rayon de convergence $a$.

Déterminer $a$ et $f(x)$ lorsque $g(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$

**II^e^ Partie.**

Soit $u_n$ l'application qui à toute fonction $f(x)$ de E (J) fait correspondre la fonction $g_n$ définie par :

$$g_n(x) = f(x) - x f'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) - \ldots + (-1)^p \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(x) + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

1°) $u_n$ est-il un endomorphisme de E (J) ?

2°) Montrer que tout polynôme de degré maximum $n$ et de valuation positive appartient au noyau de $u_n$. (On pourra se servir de la formule de Taylor.)

3°) On suppose que J ne contient pas 0 ; on pose $f(x) = x\varphi(x)$. Déterminer le noyau de $u_n$. En déduire ce noyau lorsque 0 appartient à J.

4°) *a)* Montrer que si 0 n'appartient pas à J, $u_n$ est surjectif.

*b)* Quel est l'ensemble des fonctions $f$ de E (J) telles que $u_n(f) = 1$ ?

*c)* En supposant toujours que J ne contient pas 0, déterminer l'ensemble des fonctions $f$ de E (J) telles que $u_n(f) = x^p$ lorsque $p$ est un entier supérieur à $n$, puis lorsque $p$ est un entier compris au sens large entre 1 et $n$.

5°) Préciser, suivant la parité de $n$, le sous-ensemble $V_n$ de E ($J_a$) dont l'image par $u_n$ est dans $F_a$, et le sous-ensemble $W_n$ de E ($J_a$) dont l'image par $u_n$ est dans $G_a$.

6°) Montrer que $S_a$ est stable par $u_n$, et déterminer les coefficients du développement en série entière de $g = u_n(f)$ en fonction de ceux de $f$ quand $f$ appartient à $S_a$.